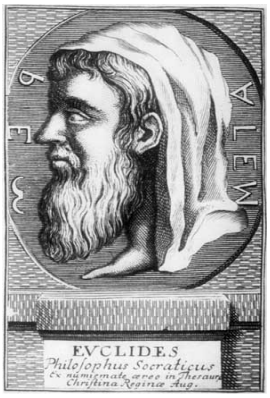
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „EUCLID”
Focşani, 19 noiembrie 2016

Clasa a VI – a



SUBIECTUL I

a) Să se demonstreze că numerele de forma $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}$ sunt divizibile cu 100, oricare ar fi numărul natural nenul n.

b) Demonstrați că fracția $\frac{n+1}{3 \cdot n^2 + 2 \cdot n}$ este ireductibilă, oricare ar fi numărul natural nenul n.

c) O bucată de caşcaval în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 24 cm, 18 cm şi 12 cm. Dacă bucata de caşcaval este tăiată în bucăți în formă de cub cu muchia de 2 cm, atunci care este numărul maxim de cuburi care se poate obține?

SUBIECTUL II

Fie unghiul alungit $A\hat{O}B$ şi $[OM_1$, $[OM_2$, $[OM_3$ şi $[OM_4$ semidrepte (în această ordine) situate în acelaşi semiplan față de dreapta AB astfel încât $(OM_1 \subset Int(A\hat{O}M_2)$, $(OM_2 \subset Int(A\hat{O}M_3)$, $(OM_3 \subset Int(A\hat{O}M_4)$. Aflați măsurile unghiurilor $A\hat{O}M_1$, $A\hat{O}M_2$, $A\hat{O}M_3$, $A\hat{O}M_4$ ştiind că $m(M_3\hat{O}M_4) + m(M_4\hat{O}B)$ este dublul $m(A\hat{O}M_1) + m(M_1\hat{O}M_2) + m(M_2\hat{O}M_3)$ şi $m(M_3\hat{O}M_4)$ este $\frac{9}{11}$ din $m(M_4\hat{O}B)$, iar $m(A\hat{O}M_2)$ este triplul lui $m(A\hat{O}M_1)$ şi $m(A\hat{O}M_3)$ este de 6 ori mai mare ca $m(A\hat{O}M_1)$.

SUBIECTUL III

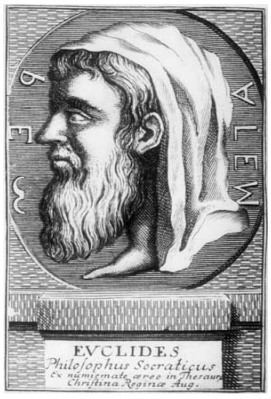
Se consideră numerele naturale a şi b. Se ştie că restul împărțirii lui a la b este 98, câtul împărțirii lui a la b este numărul natural c şi că a are patru cifre, iar are ultima cifră lui a egală cu 1.

a) Să se arate că numărul natural c are cel mult două cifre.

b) Dacă, în plus, b are două cifre şi prima cifră a numărului a este egală cu 5, atunci să se determine numerele naturale a, b şi c.

Timp de lucru: 2 ore
Se acordă 1 p din oficiu pentru fiecare subiect
Subiecte propuse de:
Profesor Romeo ZAMFIR, Colegiul Național „Vasile Alecsandri” Galați
Informații despre concurs găsiți la *https://concurseuclidfocsani.wordpress.com*

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „EUCLID”
Focşani, 19 noiembrie 2016



Clasa a VI – a

Soluţii şi barem de corectare

Notă: *Fiecare dintre subiectele I, II şi III primeşte câte 1 p din oficiu*

SUBIECTUL I

a) Să se demonstreze că numerele de forma $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}$ sunt divizibile cu 100, oricare ar fi numărul natural nenul n.

b) Demonstrați că fracția $\dfrac{n+1}{3\cdot n^2 + 2\cdot n}$ este ireductibilă, oricare ar fi numărul natural nenul n.

c) O bucată de caşcaval în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 24 cm, 18 cm şi 12 cm. Dacă bucata de caşcaval este tăiată în bucăți în formă de cub cu muchia de 2 cm, atunci care este numărul maxim de cuburi care se poate obține?

SOLUȚIE

a) $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} = 7^n \cdot (1 + 7 + 7^2 + 7^3)$ ... 1p

$= 7^n \cdot (1 + 7 + 49 + 343) = 7^n \cdot 400$, ... 1p

deci numerele de forma $7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}$ sunt divizibile cu 100, oricare ar fi numărul natural nenul n. ... 1p

b) Fie $d \in \mathbb{N}^*$ un divizor comun al numărătorului şi al numitorului fracției date. ... 1p

$d \mid (n+1) \Rightarrow d \mid n\cdot(n+1) \Rightarrow d \mid n^2 + n \Rightarrow d \mid 3\cdot n^2 + 3\cdot n$ ... 1p

Dar

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 3\cdot n^2 + 3\cdot n \\ d \mid 3\cdot n^2 + 2\cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid n$$ ... 1p

Avem acum

$$\left.\begin{array}{l} d \mid n+1 \\ d \mid n \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 1.$$

Înseamnă că fracția este ireductibilă. ... 1p

c) $24 : 2 = 12;\ 18 : 2 = 9;\ 12 : 2 = 6$ ... 1p

$12 \cdot 9 \cdot 6 = 648$ cuburi ... 1p

SUBIECTUL II

Fie unghiul alungit $A\hat{O}B$ şi $[OM_1$, $[OM_2$, $[OM_3$ şi $[OM_4$ semidrepte (în această ordine) situate în acelaşi semiplan față de dreapta AB astfel încât $(OM_1 \subset Int(A\hat{O}M_2)$, $(OM_2 \subset Int(A\hat{O}M_3)$, $(OM_3 \subset Int(A\hat{O}M_4)$. Aflați măsurile unghiurilor $A\hat{O}M_1$, $A\hat{O}M_2$, $A\hat{O}M_3$, $A\hat{O}M_4$ ştiind că $m(M_3\hat{O}M_4)+m(M_4\hat{O}B)$ este dublul $m(A\hat{O}M_1)+m(M_1\hat{O}M_2)+m(M_2\hat{O}M_3)$ şi $m(M_3\hat{O}M_4)$ este $\frac{9}{11}$ din $m(M_4\hat{O}B)$, iar $m(A\hat{O}M_2)$ este triplul lui $m(A\hat{O}M_1)$ şi $m(A\hat{O}M_3)$ este de 6 ori mai mare ca $m(A\hat{O}M_1)$.

SOLUȚIE

Fie $m(A\hat{O}M_1)=u_1$, $m(M_1\hat{O}M_2)=u_2$, $m(M_2\hat{O}M_3)=u_3$, $m(M_3\hat{O}M_4)=u_4$ şi $m(M_4\hat{O}B)=u_5$.

Avem că

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=180^\circ \\ u_4+u_5=2\cdot(u_1+u_2+u_3) \\ u_4=\frac{9}{11}\cdot u_5 \\ u_1+u_2=3\cdot u_1 \\ u_1+u_2+u_3=6\cdot u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \ldots \ 3\text{p}$$

$$\begin{cases} 3\cdot(u_1+u_2+u_3)=180^\circ \\ u_4+u_5=2\cdot(u_1+u_2+u_3) \\ u_4=\frac{9}{11}\cdot u_5 \\ u_2=2\cdot u_1 \\ u_2+u_3=5\cdot u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \ldots \ 2\text{p}$$

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=60^\circ \\ u_4+u_5=120^\circ \\ u_4=\frac{9}{11}\cdot u_5 \\ u_2=2\cdot u_1 \\ u_3=3\cdot u_1 \end{cases} \quad \ldots \ 2\text{p}$$

În final obținem $u_1=10^\circ$, $u_2=20^\circ$, $u_3=30^\circ$, $u_4=54^\circ$ şi $u_5=66^\circ$. … 1p

Deci,

$m(A\hat{O}M_1)=10^\circ$, $m(A\hat{O}M_2)=30^\circ$, $m(A\hat{O}M_3)=60^\circ$, $m(A\hat{O}M_4)=114^\circ$ … 1p

SUBIECTUL III

Se consideră numerele naturale a şi b. Se ştie că restul împărţirii lui a la b este 98, câtul împărţirii lui a la b este numărul natural c şi că a are patru cifre, iar are ultima cifră lui a egală cu 1.

a) Să se arate că numărul natural c are cel mult două cifre.

b) Dacă, în plus, b are două cifre şi prima cifră a numărului a este egală cu 5, atunci să se determine numerele naturale a, b şi c.

SOLUŢIE

a) Din ipoteză avem că a are patru cifre şi are ultima cifră egală cu 1, de unde rezultă că $a \leq 9991$. ... 1p

Din teorema împărţirii cu rest avem că $a = b \cdot c + 98,\ 98 < b$. Deci, $b \geq 99$ 1p

Presupunem prin absurd că c are cel puţin trei cifre. Rezultă că $a = b \cdot c + 98 \geq 99 \cdot 100 + 98 = 9998$, adică $a \geq 9998$ ceea ce reprezintă o contradicţie. Prin urmare c are cel mult două cifre. ... 1p

b) Am demonstrat mai sus că $b \geq 99$ şi din ipoteză avem că b are două cifre, deci $b = 99$. ... 1p

Analizând ultima cifră a numerelor din relaţia $a = 99 \cdot c + 98$ obţinem că c are ultima cifră 7. ... 1p

Dar, $c = 7$ nu este soluţie şi din a) obţinem că $c = \overline{z7}$ ... 1p

şi $a = \overline{5xy1}$, atunci avem că $\overline{5xy1} = 99 \cdot \overline{z7} + 98$. ... 1p

Analizând toate cazurile după $z \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ obţinem $x = 7$, $y = 4$ şi $z = 5$. ... 1p

Deci, $a = 5741$, $b = 99$ şi $c = 57$. ... 1p